Einfache Konstruktionen

Abstract:
Über einfache Konstruktionen (nicht nur mit Lineal und Zirkel(straightedge and compass)) wie unten angeführt, erreichen wir die "Quadratur des Kreises" - also eine flächengleiche Rechtecksfläche zur einer gegebenen Kreisfläche. In der Umgangssprache ist diese Aufgabe eine Metapher für "unlösbare Aufgabe". Unlösbar ist diese Aufgabe aber nur - und das wissen viele Leute nicht - mit Zirkel und Lineal. Mit anderen "Tricks" gelingt das jedoch. Hier wird ein möglicher Weg dargelegt - wobei auch kleinere Ausflüge in die Welt der Kurven vorkommen.

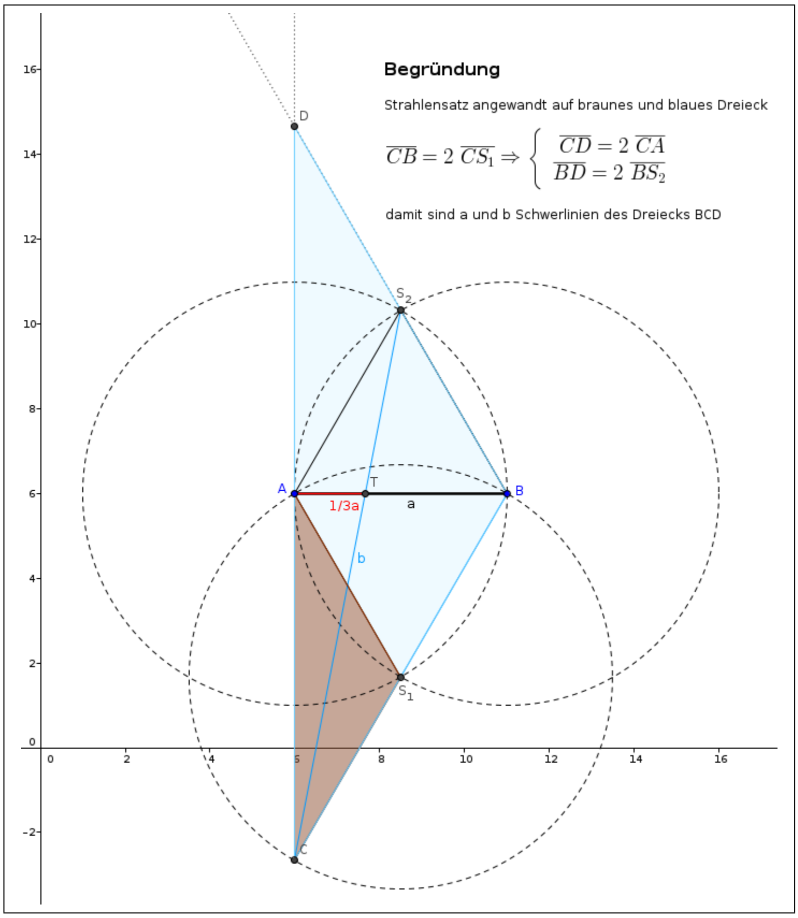
1. Halbierung einer Strecke: $x \mapsto \frac{x}{2}$
2. Dreiteilung einer Strecke: $x \mapsto \frac{x}{3}$
3. Wurzel einer Strecke: $x \mapsto \sqrt{x}$
4. Reziprokwert einer Strecke: $x \mapsto \frac{1}{x}$
5. Dreiteilung eines Winkels: $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{3}$
6. Quadratur des Kreises

1 Halbierung einer Strecke

Das kennt natürlich jeder: Man "bastelt" mit dem Zirkel 2 gleichschenkelige - um die zu halbierende Strecke symmetrische - Dreiecke und nutzt aus, dass die Höhe in einem gleichschenkeligen Dreieck die Basis halbiert (warum?)

2 Dreiteilung einer Strecke

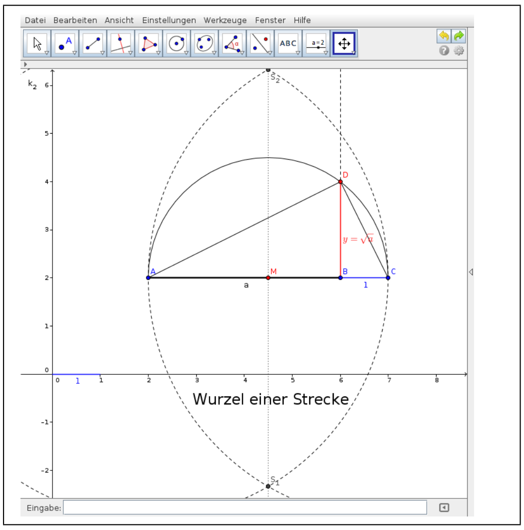
Zuerst schauen wir uns eine der möglichen Kunstruktionen an. (Drücken Sie auf den Start-Button und Sie müssen JAVA installiert haben)
zur Konstruktion



Die Erklärung basiert auf der Tatsache, dass sich Schwerlinien im Verhältnis 1:2 schneiden. Wir müssen also ein Dreieck finden, in dem die Strecken a und b Schwerlinien sind. Durch die ersten beiden Kreise bilden 2 gleichseitige Dreiecke eine Raute und den Rest erledigt der Strahlensatz – wie auf der Zeichnung angegeben! Also A und S_2 sind also jeweils die Mittelpunkte der Seiten.

3 Wurzel einer Strecke

Zuerst schauen wir uns eine der möglichen Kunstruktionen an. (Drücken Sie auf den Start-Button und Sie müssen JAVA installiert haben)
zur Konstruktion



Man sieht jetzt eingezeichnet den Thaleskreis mit seinem rechtwinkeligen Dreieck. Aus dem Höhensatz ergibt sich:

$$a \cdot 1 = y^2$$

Woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

Eine andere Möglichkeit wäre den Halbkreis zu einem Kreis zu ergänzen und den Sehnensatz zu verwenden:

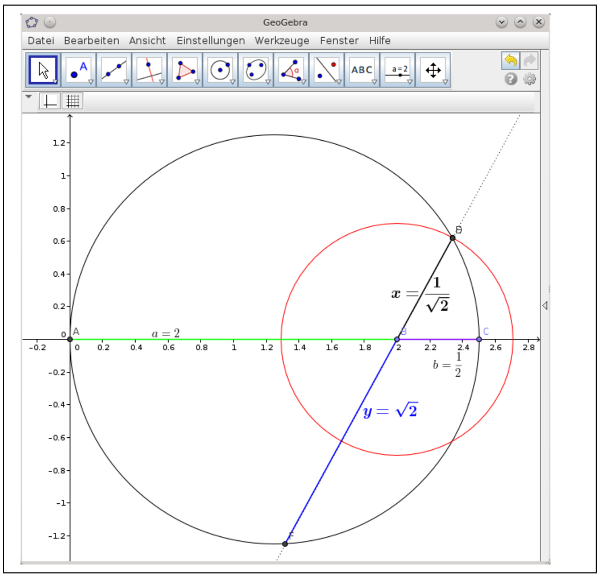
Schneiden sich 2 Sehnen im Kreis, so ist das Produkt der Sehnenabschnitte gleich!

Auch das liefert obige Gleichung und beweist den Höhensatz gleich mit.

4 Reziprokwert einer Strecke

Auch hier können wir den Sehnensatz für unsere Zwecke benützen: $\underbrace{a \cdot b}_{=1} = x \cdot y$

Wenn wir z.B.: $a = 2$ und $b = \frac{1}{2}$ setzen, ergibt sich für y der Kehrwert von x



Hier die bereits vollständige Konstruktion der Strecke $y = \sqrt{2}$ falls man $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ bereits weiß. Natürlich geht das auch umgekehrt. Man kann sich Gedanken machen für welche Werte von x die Konstruktion funktioniert bzw. wie sie abgeändert werden kann, damit sie für andere Werte von x auch Werte von y liefert!

5 Dreiteilung eines Winkels

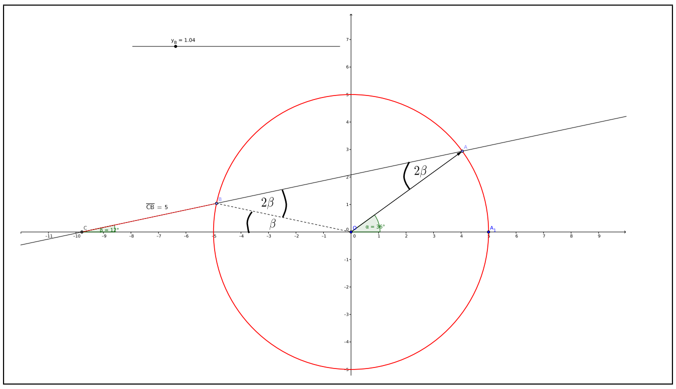
Wie heute bereits jeder weiß, ist die Dreiteilung eines Winkels mit Lineal und Zirkel (straightedge and compass) nicht möglich. Aber es gibt natürlich andere Methoden. 2 davon möchte ich hier vorstellen:

a) Nach Archimedes

Ein Schenkel des Winkel α schneidet einen Kreis (Scheitel des Winkels ist Mittelpunkt) in A. Von A aus ziehen wir eine Sekante, die den Kreis in B schneidet und die x-Achse in C. Wir verändern jetzt B solange (mit dem Schieberegler) bis gilt

$\boxed{\overline{CB} = \text{Radius des Kreises}}$

zum Geogebra-Arbeitsblatt



Beweis:
Es ergeben sich 2 gleichschenkelige Dreiecke: COB und BOA. Bei denen müssen die Basiswinkel gleich groß sein. Für die Winkel zwischen positiver und negativer x-Achse ergibt sich folgende Gleichung:

$$\alpha + (2\pi - 4\beta) + \beta = 2\pi$$

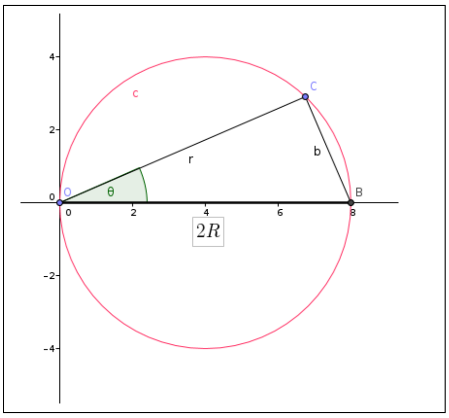
Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Kann man C nicht konstruieren? Ja, aber nicht mit einem Kegelschnitt. C liegt auf einer *Pascal'schen Schnecke*. Diese entsteht, wenn man an die Kreissehne noch ein Stück(z.B.:den Radius) dranhängt. Entwickeln wir zuerst die Polarform $r(\theta)$ und daraus mit

$$\vec{x}(\theta) = r(\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = r(\theta)\vec{e}_\theta$$

die Parameterform.

Wir bestimmen $r(\theta)$ (die Länge von einem Punkt ausgehenden Sehnenlängen). Als Ausgangspunkt nehmen wir den einfachsten - den Ursprung.



Mit der Thaleskreisbeziehung ist klar, dass r die Länge der Orthogonalprojektion des Durchmessers $2R$ ist, also gilt

$$r(\theta) = 2R\,cos\theta$$

Ein um R verlängerter Punkt P hat dann die Polarkoordinaten

$$P(\theta): \quad r(\theta) = 2R\,cos\theta + R$$

Wie oben erwähnt ergibt sich eine Parameterdarstellung zu

$$\vec{p} = r(\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad -\frac{4\pi}{6} \le \theta \le \frac{4\pi}{6}$$

Wir überprüfen unsere Überlegungen in einem Geogebra-Arbeitsblatt: Wir geben in der Befehlszeile folgende Befehle ein(wir setzen bei uns $R = 4$)

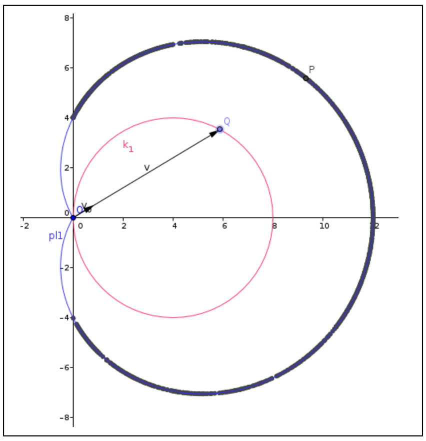
```
k_1=Kreis[(4, 0), 4]
O=(0,0)
Q = Punkt[k_1]
v=Vektor[O,Q]
v_0=Einheitsvektor[v]
P=Q+4*v_0
SetzeSpur[P,true]
```

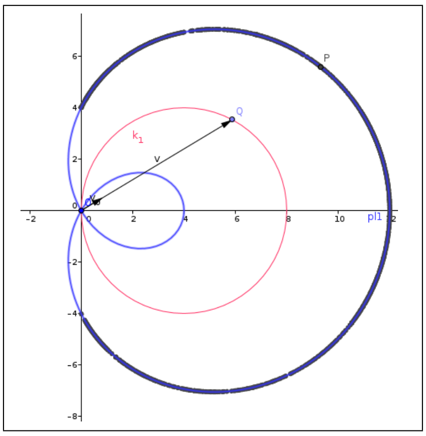
Hier sollte man Q vom Ursprung entfernen - falls er dort zu liegen kommt!

Durch bewegen von Q bekommen wir die Kurve - allerdings können wir θ auf diese Weise nur im Bereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ variieren. Legen wir die Parameterkurve darüber:

```
r(x)= 8*cos(x) + 4
SetzeSichtbarInGrafikansicht[r,1,false]
pl1=Kurve[r(t)*cos(t),r(t)*sin(t),t,-pi/2,pi/2]
```

pl1 steht hier für Pascals Limacon 1. Geht man auf "Ansicht" - "Ansichten auffrischen" kann man erkennen, dass wir richtig liegen. Wir bekommen die "Spurkurve" von P (wie in der unteren Abb. ersichtlich). Aber wie oben schon angedeutet bleibt r positiv in $[-\frac{4\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{6}]$ also ändern wir in den Eigenschaften von $pl1$ den Start- und Endwert des Parameters entsprechend ab - das ergibt den zusätzlichen "blauen Teil" der Kurve. Damit könnten wir zufrieden sein - schließlich ist die Kurve geschlossen: mehr positive r sind nicht zu haben. Trotzdem geben wir als mögliche Parameterwerte für $pl1$ die gesamte Umdrehung ein also $\theta \in [0, 2\pi]$ und raus kommt die untenstehende rechte Abbildung! Hier das Arbeitsblatt





Welche Bedeutung hat die innere Kurve? Für manche Gerade durch $[P, Q]$ hat diese auch einen Schnittpunkt mit der inneren Schleife, sagen wir bei θ', dann gilt

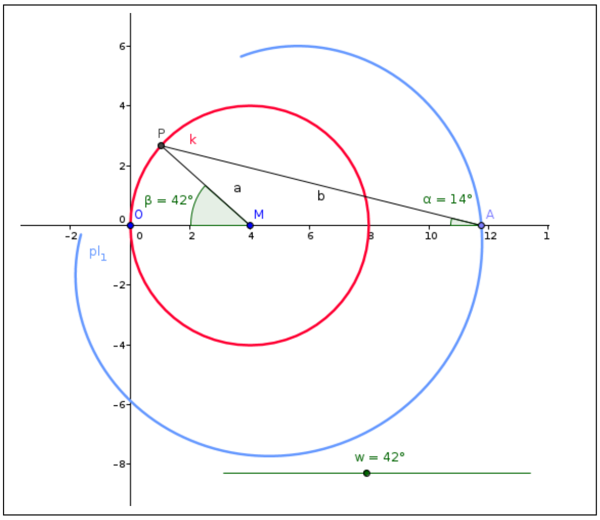
$$\vec{x}(\pi+\theta') = \underbrace{r(\pi+\theta')}_{\leq 0}\,\vec{e}_{\pi+\theta'} = \underbrace{r(\pi+\theta')}_{\leq 0}\,(-\vec{e}_{\theta'}) = \underbrace{-r(\pi+\theta')}_{\geq 0}\,\vec{e}_{\theta'} \overbrace{=}^{\cos(\pi+\theta')=-\cos(\theta')} \boxed{(2R\,cos\theta' - R)\vec{e}_{\theta'}}$$

D. h. auf der inneren Schleife sind jene Punkte, die einen negativen Abstand vom Kreis haben! Dies geht sich allerdings nicht für alle Punkte Q des Kreises aus.

So jetzt können wir mit der Pascalschen Limacon die Dreiteilung des Winkels konstruieren - aber nicht mit Zirkel und Lineal!

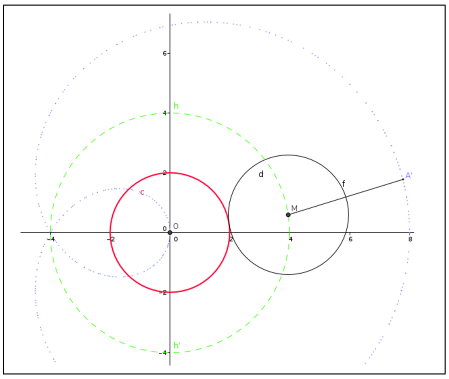
Wir konstruieren das Arbeitsblatt:

```
M=(4,0)
O=(0,0)
k=Kreis[M,4]
r(x)=8*cos(x)+4   //unsichtbar schalten
pl=Kurve[r(t)*cos(t), r(t)*sin(t), t, -pi/2, pi/2]  // jetzt Schieberegler w für Winkel einfügen
P=M+(cos(pi-w), sin(pi-w))
pl_1=Drehe[pl,-w,M]
```



Im Arbeitsblatt kann man mit dem Schieberegler den Winkel einstellen - leider kann Geogebra nicht den Schnittpunkt der Limacon mit der x-Achse bestimmen - das muss man selber erledigen: Hineinzoomen - Schnittpunkt einfügen - und Winkel bestimmen. Es sollte dann so aussehen wie in der Abbildung.
Hier das Arbeitsblatt

Es gibt noch einen anderen Zugang zur Limacon: Sie ist darstellbar als *Epizykloide*. Die Abrollung eines Kreises auf einem anderen Kreis. In diesem Spezialfall haben beide Kreise den Radius r und im Mittelpunkt des rollenden schwarzen Kreises ist eine Stange mit der Länge $2r$ befestigt. Die Stangenspitze beschreibt eine Limacon! Wir leiten die Parameterdarstellung in diesem Koordinatensystem her, wobei die Drehung durch eine Rotationsmatrix erreicht wird (θ sei der Rotationswinkel):



$$M = 2r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = M + 2r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

die Stangenspitze A' beschreibt dann (D sei die Drehung von A um M um θ

$$A' = D(A,\theta,M) = (D(A-M,\theta,O)+M)$$

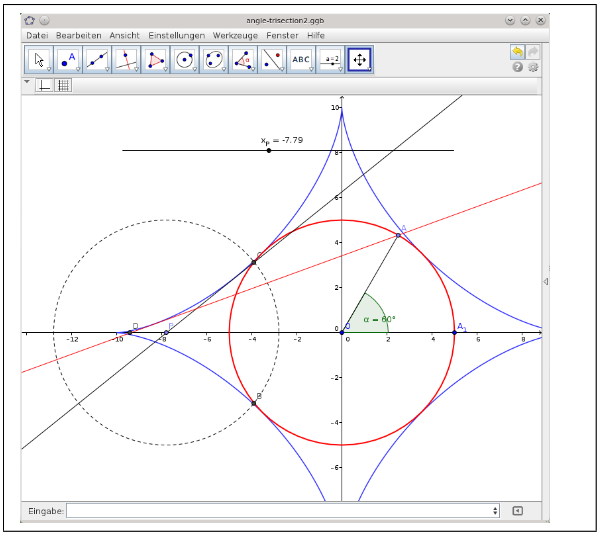
$$A'(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} 2r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + M$$

Mit einer Verschiebung des Ursprung um $2r = R$ sollte sich dieselbe Parametergleichung ergeben, wie wir sie von der Polarform hergeleitet haben.

Beachten Sie, dass durch die “Eigenrotation” des äußeren Kreises dieser eine zusätzliche Drehung pro Umlauf erfährt - dieser also 2 Umdrehungen pro Umlauf macht. Diese Eigenrotation spielt auch bei “Sonnentag” und “Sterntag” eine Rolle.

Im folgenden Geogebra Arbeitsblatt können Sie mit den Schiebereglern die Kreisradien, den Abstand A von seinem Rotationszentrum und natürlich die Zeit(Winkel) als Parameter einstellen. Für $a = 2$ und $b = 4$ kann man auch die parametrisierte Limacon e einblenden! (Ein interessante Verallgemeinerung wäre die Formel einer Epizykloide: Kreis k_2 mit r rollt auf k_1 mit R ab. Länge der “Stange” ist ρ)

Eine andere Möglichkeit die Sache anzugehen, wäre wie im folgenden Geogebra Arbeitsblatt



Sie wählen einen Punkt P auf der negativen x-Achse, tragen von dort den Kreis mit Radius R auf und bekommen einen Schnittpunkt C mit dem “Winkelkreis” (den anderen Schnittpunkt B ignorieren wir - das ganze “Problem” ist ja symmetrisch um die x-Achse). Zeichnen Sie die Gerade[P,C] ein. Wenn Sie P mit dem Schieberegler verändern(seine x-Koordinate x_P), hüllt diese Gerade eine Kurve ein (sie ist Tangente) - ich hab sie blau eingezeichnet - es ist eine *Astroide*. Wenn man den Astroidenast im 2. Quadranten kennt, braucht man “nur mehr” von A aus eine Tangente an die Astroide zu ziehen. Abgesehen, dass das “Tangentenziehen” auch keine saubere Konstruktion ist, ist auch noch die Astroide eine Kurve 6. Grades, wie man sich leicht auf der Algebraseite des Arbeitsblatts vergewissern kann.

Im Arbeitsblatt können Sie die *Astroide* auch dadurch sichtbar machen, indem Sie bei der zu verschiebenden “Sehnengerade” die Spur einschalten. Zeigen wir, dass es sich bei der obigen Hüllkurve um eine *Astroide* handelt. Normalerweise wird sie ja konstruiert, indem man eine Leiter (konstanter Länge) an einer Hauswand aufrichtet - die entstehende Hüllkurve ist ebenfalls eine Astroide (sie wird u.a. auch benötigt bei dem Problem “Bringen wir den Kasten um die Ecke?” – hier ein Link dazu! In diesem Dokument ist auch erläutert, dass die Astroide ein *Hypozykloide* (Abrollen eines Kreises im Innern eines anderen Kreises) ist.

Wir bestimmen jetzt die Hüllkurve mit dem Theorem:

> Sei eine Geradenschar in Abhängigkeit von einem Parameter t gegeben:
> $g: \quad a(t)\,x + b(t)\,y = c(t)$. Dann erhält man den Berührpunkt mit der Hüllkurve, indem man die Gerade g mit der “Ableitungsgeraden”
> $\dot a(t)\,x + \dot b(t)\,y = \dot c(t)$ schneidet.

Beweis: Sei $\vec c(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ die Gleichung der Hüllkurve c. Diese hat dann im Punkt $C(u(t), v(t))$ die Tangente

$$\vec x(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \lambda \left.\begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \end{pmatrix}\right| \cdot \begin{pmatrix} \dot v(t) \\ -\dot u(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Tangente} \quad & g: \quad \dot v\,x - \dot u\,y = \dot v\,u - \dot u\,v \\ \text{Ableitungsgerade} \quad & \dot g: \quad \ddot v\,x - \ddot u\,y = \ddot v\,u - \ddot u\,v \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $x = u$ und $y = v$ eine Lösung beider Geradengleichungen!

Wir setzen dieses Theorem mit wxMaxima um:

Wir setzen den Mittelpunkt des verschiebbaren linken Kreises $t \in [0, r]$

(%i1) `M:[-(2*r-t),0];`

(%o1) $[t-2\,r, 0]$

Der Kreis im Ursprung als equation1

(%i2) `eq1: x^2+y^2=r^2;`

(%o2) $y^2+x^2=r^2$

linker Kreis

(%i3) `eq2:(x-first(M))^2+y^2=r^2;`

(%o3) $y^2+(x-t+2\,r)^2=r^2$

Schnitt der Kreise

(%i4) `eq3:eq1-eq2;`

(%o4) $x^2-(x-t+2\,r)^2=0$

Lösung als Variable x1 extrahieren - rhs → right hand side in equation

(%i5) `x1:rhs(first(solve(eq3,x)));`

(%o5) $\frac{t-2\,r}{2}$

Probe

(%i6) `x1;`

(%o6) $\frac{t-2\,r}{2}$

Wir setzen x1 in Kreisgleichung ein

(%i7) `eq4:subst(x1,x,eq1);`

(%o7) $y^2+\frac{(t-2\,r)^2}{4}=r^2$

Wir holen uns den positiven y-Wert des Schnittpunkts y1

(%i8) `y1:rhs(second(solve(eq4,y)));`

(%o8) $\frac{\sqrt{4\,r\,t-t^2}}{2}$

Wir legen eine Gerade durch (x1,y1) und (x2,y2)

(%i9) `x2:first(M);`

(%o9) $t-2\,r$

(%i10) `y2:second(M);`

(%o10) 0

Geradengleichung

```
(%i11) eq5:(y-y2)=(y2-y1)/(x2-x1)*(x-x2);
```

(%o11) $$y=-\frac{\sqrt{4\,r\,t-t^2}\,\left(x-t+2\,r\right)}{2\,\left(-\frac{t-2\,r}{2}+t-2\,r\right)}$$

Wir formen ein bisschen um

```
(%i12) eq6:eq5*2*(-(t-2*r)/2+t-2*r);
```

(%o12) $$2\,\left(t+\frac{2\,r-t}{2}-2\,r\right)\,y=-\frac{\left(t+\frac{2\,r-t}{2}-2\,r\right)\,\sqrt{4\,r\,t-t^2}\,\left(x-t+2\,r\right)}{-\frac{t-2\,r}{2}+t-2\,r}$$

```
(%i13) eq7:expand(eq6);
```

(%o13) $$t\,y-2\,r\,y=-\sqrt{4\,r\,t-t^2}\,x+t\,\sqrt{4\,r\,t-t^2}-2\,r\,\sqrt{4\,r\,t-t^2}$$

```
(%i14) eq8:eq7/sqrt(4*r*t-t^2);
```

(%o14) $$\frac{t\,y-2\,r\,y}{\sqrt{4\,r\,t-t^2}}=\frac{-\sqrt{4\,r\,t-t^2}\,x+t\,\sqrt{4\,r\,t-t^2}-2\,r\,\sqrt{4\,r\,t-t^2}}{\sqrt{4\,r\,t-t^2}}$$

Wir vereinfachen und speichern in g1

```
(%i15) g1:ratsimp(eq8);
```

(%o15) $$\frac{\left(t-2\,r\right)\,y}{\sqrt{4\,r\,t-t^2}}=-x+t-2\,r$$

Jetzt die Ableitungsgerade

```
(%i16) g2:diff(g1,t,1);
```

(%o16) $$\frac{y}{\sqrt{4\,r\,t-t^2}}-\frac{\left(4\,r-2\,t\right)\,\left(t-2\,r\right)\,y}{2\,\left(4\,r\,t-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}=1$$

Schnitt der beiden Geraden

```
(%i17) solve([g1,g2],[x,y]);
```

(%o17) $$[[x=\frac{t^3-6\,r\,t^2+12\,r^2\,t-8\,r^3}{4\,r^2},y=-\frac{\sqrt{4\,r\,t-t^2}\,\left(t^2-4\,r\,t\right)}{4\,r^2}]]$$

Um zu zeichnen brauchen wir einen Wert für r - wir nehmen 5

```
(%i18) r:5$
```

Das Achsenverhältnis sollte gleich sein

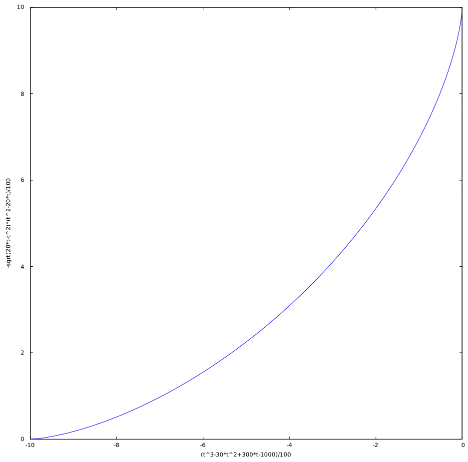
```
(%i19) set_plot_option ([gnuplot_preamble, "set size ratio -1"])$
```

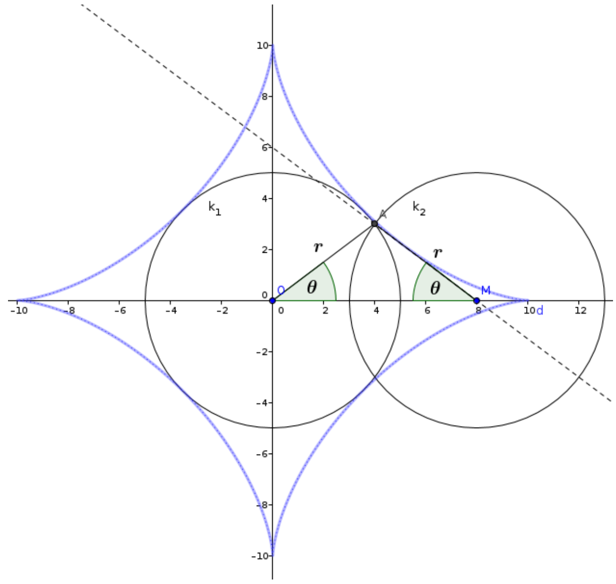
Wir kopieren die Lösungen von oben in den plot2d-Befehl

```
(%i20) plot2d([parametric,(t^3-6*r*t^2+12*r^2*t-8*r^3)/(4*r^2),
-(sqrt(4*r*t-t^2)*(t^2-4*r*t))/(4*r^2),[t,0,10],[nticks, 100]]);
```

(%o20)

Das Ergebnis sehen wir unten in der linken Zeichnung:





Normalerweise nimmt man allerdings nicht die horizontale Verschiebung des Kreismittelpunkt als Parameter, sondern den "Winkelabstand" θ des verschiebbaren Kreises. Dadurch müsste auch die Symmetrie, die diese Kurve offensichtlich hat, sich in ihrem erzeugenden Term widerspiegeln (rechte Zeichnung)

Der Punkt A hat die Koordinaten $(x_1, y_1) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, die Steigung der Geraden (der Hüllkurve-Erzeugenden) $k = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Damit ergibt sich für die Geradengleichung und der Ableitungsgeraden folgendes Gleichungssystem

$$(y - y_1) = k(x - x_1) \Rightarrow y - r\sin\theta = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x - r\cos\theta)$$

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & \sin\theta\, x + \cos\theta\, y & = 2r\,\sin\theta\cos\theta \,|\cdot\sin\theta \\ 2) & \cos\theta\, x - \sin\theta\, y & = 2r\,\sin\theta\cos\theta \,|\cdot\cos\theta \end{array}\right\} + \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 2r\,(\cos\theta)^3 \qquad \text{und} \qquad y = 2r\,(\sin\theta)^3} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Bei dieser Darstellung spiegelt sich die Symmetrie um die Achsen und die Medianen wider.

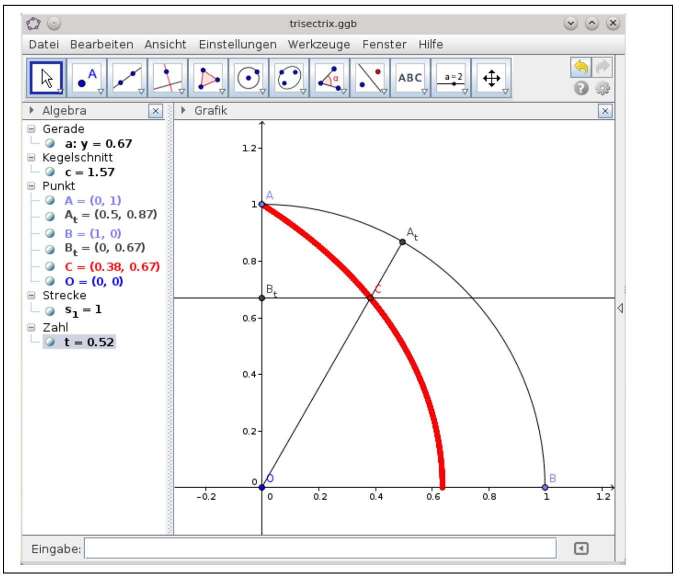
$$\left.\begin{array}{rr} \cos\theta = & \cos(-\theta) \\ \sin\theta = & -\sin(-\theta) \end{array}\right\} \text{y-Koord.} \updownarrow \qquad \left.\begin{array}{rr} \cos\theta = & -\cos(\pi \pm \theta) \\ \sin\theta = & \sin(\pi \pm \theta) \end{array}\right\} \text{x-Koord.} \leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rr} \cos\theta = & \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \theta\right) \\ \sin\theta = & \cos\left(\frac{\pi}{4} \pm \theta\right) \end{array}\right\} \text{x} \leftrightarrow \text{y}$$

Jetzt lassen wir aber Archimedes in Frieden ruhen und widmen uns der

b) Trisektrix von Hippias von Elis

Am leichtesten tut man sich vielleicht mit einer dynamischen Definition – wie hier im Bild angedeutet bzw. man kann sich auch das Geogebra-Arbeitsblatt dafür runterladen und diesen Vorgang beobachten! (Gehen Sie im Algebrafenster zu t - rechte Maustaste - Animation ein)



Ein Punkt A_t bewegt sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit auf einem Kreisbogen von A nach B. Innerhalb der derselben Zeitspanne bewegt sich ein Punkt B_t von A nach O. Die Waagrechte durch B_t und OA_t schneiden sich in C. Die Spur von C ist die Trisektrix (von Hippias). Findet die Bewegung innerhalb einer Zeiteinheit ab, ergibt sich für die Position von $C(x(t), y(t))$:

$$y(t) = 1 - t \qquad \alpha(t) = \frac{\pi}{2}(1 - t)$$

$$\tan\alpha(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \Rightarrow x(y) = \cot\left(\frac{\pi}{2}y\right) \cdot y$$

$$\boxed{\lim_{y\to 0} x(y) = \frac{2}{\pi} \approx 0,63662}$$

Dies kann man auf der Zeichnung leicht feststellen!

Um den letzten Punkt (Grenzwert) zu beweisen ist es leichter die Bewegung in umgekehrter Richtung laufen zu lassen - das gibt einfachere Formeln:

$$g_1 : \quad y = t \qquad g_2 : \quad y = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{\cos(\frac{\pi}{2}t)}\,x$$

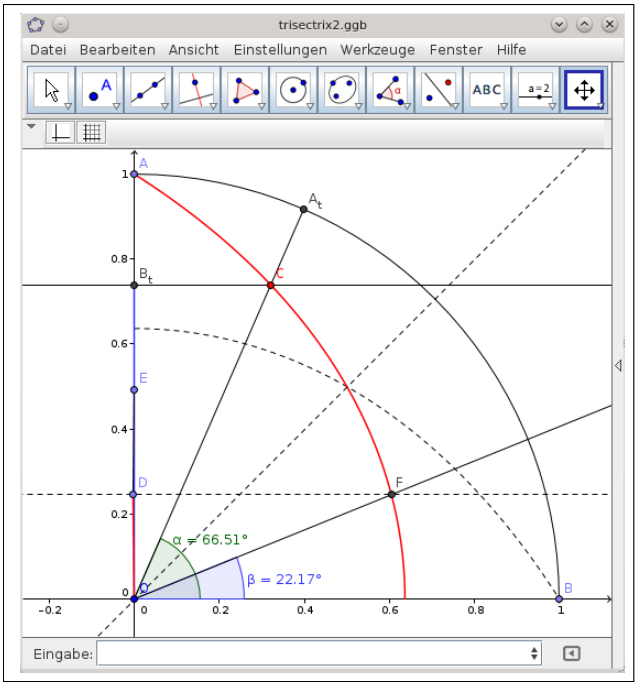
$$g_1 \cap g_2 : \quad x(t) = t\,\frac{\cos(\frac{\pi}{2}t)}{\sin(\frac{\pi}{2}t)}$$

wobei uns interessiert, welchen Wert x zum Zeitpunkt 0 hat - leider ergibt sich dafür ein unbestimmter Ausdruck. Wie fast immer bei Winkelfunktionen hilft die Taylorentwicklung der Sinusfunktion weiter:

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to 0} t\,\frac{\cos(\frac{\pi}{2}t)}{\frac{\pi}{2}t - \left(\frac{\pi}{2}t\right)^3 + \ldots} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}t)}{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 t^2 + \ldots}$$

Jetzt stellt der Grenzübergang kein Problem mehr dar und ergibt obige Behauptung!

Mit der Trisektrix wird die Dreiteilung eines Winkels reduziert auf die Dreiteilung einer Strecke (das ist aber bereits geklärt)



Wir haben einen Winkel $\alpha = \angle A_tOB$, schneiden mit der Trisektrix und erhalten C und damit B_t. Die Strecke OB_t wird gedrittelt, damit erhalten wir D, über die Trisektrix F und damit gilt

$$\boxed{\alpha = 3\beta}$$

Die Darstellung der Trisektrix in Geogebra:

```
h(x)=cot(pi/2*x)*x
h_1=Funktion(h,0,1)
i(x)=x
tr=Spiegle(h_1,i)
```

Zuerst wird die Umkehrfunktion der Trisektrix festgelegt und unsichtbar gemacht, anschl. wird diese auf das Intervall $[0, 1]$ eingeschränkt, i wird als 1. Mediane festgelegt und als letzter Punkt wird an der 1. Mediane gespiegelt (ich habe 1. Mediane und Umkehrfkt. zu Demonstrationszwecken noch sichtbar gelassen)

Bleibt als letzter Punkt die

6 Quadratur des Kreises

Mit der Trisektrix haben wir auf der x-Achse $\frac{2}{\pi}$ zu Verfügung. Mit der "Reziprok-Konstruktion" von oben lässt sich damit die Strecke $\frac{\pi}{2}$ gewinnen und ein Rechteck mit der anderen Seite 2 ergibt damit die Fläche des Einheitskreises. Damit ist die Quadratur des Einheitskreises gelungen!